

## 9.1.10 Kombinatorické úlohy bez opakování

**Předpoklady:** 9101, 9102, 9103, 9105, 9107

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina slouží jednak ke zopakování probraného, ale zejména k praktickému nácviku kombinatoriky v situaci, ve které není z kontextu jasné jaký ze vzorců použít.

Opakování z minulých kombinatorických hodin:

- Pokud možnosti výběru navzájem kombinujeme, získáme celkový počet možností násobením.
- Pokud můžeme možnosti rozdělit do množin s prázdným průnikem, získáme celkový počet možností součtem.
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich uspořádanou  $k$ -tici máme

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ možností (variace).}$$

- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $n$  a tvoříme z nich uspořádanou  $n$ -tici máme  $P(n) = n!$  možností (permutace).
- Pokud z  $n$  prvků vybíráme  $k$  a tvoříme z nich neuspořádanou  $k$ -tici máme

$$K_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \text{ možností (kombinace).}$$

**Př. 1:** Ve sportce je každý týden z 49 čísel taženo 6 čísel a poté jedno číslo doplňkové.  
a) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud neuvažujeme doplňkové číslo?  
b) Kolika způsoby může dopadnout tah, pokud doplňkové číslo uvažujeme?

a) bez doplňkového čísla

Vybíráme 6 čísel ze 49, nezáleží na tom v jaké pořadí čísla vytáhneme, pouze na tom, která jsme vytáhli  $\Rightarrow$  sestavujeme 6-prvkovou kombinaci ze 49  $\Rightarrow$

$$\text{počet možností: } \binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13983816 \text{ možností}$$

b) s doplňkovým číslem

Máme již vybranou šestici a k nim ze zbylých čísel vybíráme jedno další číslo, které od zbývajících odlišujeme (je doplňkové). Na jeho výběr máme 43 možností, tyto možnosti kombinujeme se všemi možnostmi při výběru normálních šesti čísel  $\Rightarrow$

$$\text{počet možností } \binom{49}{6} \cdot 43$$

**Př. 2:** Známa modelka VV má obrovský šatník s velkým výběrem modelů. Například pro pěkné počasí má 15 (6 od první a 9 od druhé sponzorské firmy) druhů klobouků, 58 (24 od první a 34 od druhé sponzorské firmy) různých kostýmů a 32 (20 od první a 12 od druhé) párů bot. Kolika různými způsoby může zkombinovat jednotlivé části oblečení ta, aby byla celá vybavena od jedné firmy?

Pokud má být oblečena pouze od jedné z firem, musí mít všechny části oděvu buď od první oblečení tak, aby byla zcela oblečena pouze od jedné z firem? nebo od druhé firmy. Tyto dvě

možnosti se navzájem vylučují, celkový počet možností tak získáme jako součet možností oblečení od první firmy a možností oblečení od druhé firmy.

Oblečení od **první firmy**: 6 možností klobouky, 24 možností kostýmů 20 možností boty, každé z bot můžeme kombinovat se všemi kostýmy a klobouky  $\Rightarrow$  celkový počet možností získáme vynásobením:  $6 \cdot 24 \cdot 20$

Oblečení od **druhé firmy**: 9 možností klobouky, 34 možností kostýmů 12 možností boty, každé z bot můžeme kombinovat se všemi kostýmy a klobouky  $\Rightarrow$  celkový počet možností získáme vynásobením:  $9 \cdot 34 \cdot 12$

Celkem má modelka  $6 \cdot 24 \cdot 20 + 9 \cdot 34 \cdot 12$  možností, jak se obléknout tak, aby byla celá vybavena od jedné firmy.

**Př. 3:** Urči počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 2, 4, 5, 7. Kolik z těchto čísel je:  
a) dělitelných šesti  
b) větších než 50000

Celkový počet čísel:

Všechny možnosti, jak seřadit číslice (tvoříme uspořádané pětice z pěti prvků):  $5!$

Ne každá uspořádaná pětice z číslic 0, 2, 4, 5, 7 je pěticiferné číslo. Musíme odečíst ty, které mají na začátku nulu:  $4!$  možností (možnosti, jak seřadit za nulou zbývající číslice)

Celkový počet pěticiferných čísel:  $5! - 4!$

a) čísla dělitelná šesti

ciferný součet je dělitelný třemi:  $2 + 4 + 5 + 7 + 0 = 18 \Rightarrow$  bude platit vždy

číslo je sudé: končí na 0, 2, 4

- čísla končící na 0: na zbývající čtyři místo můžeme napsat cokoliv ze zbývajících čísel  $4!$
- čísla končící na 2: na prvním místě nemůžeme být 0  $\Rightarrow 3 \cdot 3!$  (první ze tří, zbývající uspořádáváme libovolně)
- čísla končící na 4: na prvním místě nemůžeme být 0  $\Rightarrow 3 \cdot 3!$  (první ze tří, zbývající uspořádáváme libovolně)

každé číslo dělitelné šesti patří do jedné z předchozích možností, žádné nepatří do dvou  $\Rightarrow$  celkový počet získám součtem jednotlivých možností  $4! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3!$

b) čísla větší než 50000

na prvním místě může být buď číslo 5 nebo 7  $\Rightarrow 2$  možnosti na první místo, zbývající čísla můžeme uspořádat libovolně  $\Rightarrow 2 \cdot 4!$  možností

**Př. 4:** Reprezentační hokejový tým má v nominaci 13 útočníků, 7 obránců a dva brankáře.

a) Kolik šestic (3 útočníci + 2 obránci + brankář) hráčů může trenér postavit na úvodní střídání?

b) Kolika způsoby může sestavit celý tým (1. pětka, 2. pětka, 3. pětka, 4.tý útok, brankář, náhradní brankář)

(ani u útočníků ani u obránců nerozlišujeme jejich specializaci – levý, pravý, centr)

a) ke všem možnostem, jak vybrat útočníky, můžeme vystřídat všechny možnosti výběru dvojice obránců i všechny možnosti výběru brankáře  $\Rightarrow$  možnosti budeme mezi sebou násobit

- možnosti výběru útočníků: vybíráme 3 ze 13 bez ohledu na pořadí  $\Rightarrow \binom{13}{3}$
- možnosti výběru obránců: vybíráme 2 ze 7 bez ohledu na pořadí  $\Rightarrow \binom{7}{2}$
- možnosti výběru obránců: vybíráme 1 ze 2 bez ohledu na pořadí  $\Rightarrow \binom{2}{1}$

celkem možností (kombinujeme mezi sebou):  $\binom{13}{3} \binom{7}{2} \binom{2}{1}$

b) sestavení celého týmu

sestavy jednotlivých pětek můžeme mezi sebou kombinovat  $\Rightarrow$  možnosti pro jednotlivé řady mezi sebou násobíme

první pětka:  $\binom{13}{3} \cdot \binom{7}{2}$

druhá pětka:  $\binom{10}{3} \cdot \binom{5}{2}$

třetí pětka:  $\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}$

čtvrtý útok:  $\binom{4}{3}$

brankář:  $\binom{2}{1}$

Celkový počet možností:  $\binom{13}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{2}{1}$

**Př. 5:** V třídě 4.B se budou známky z matematiky rozdělovat losem. Celkem bude mezi 31 studentů rozděleno 3 jedničky, 8 dvojek, 15 trojek, 4 čtyřky a jedna pětka.

- Kolik je možností, jak přidělit 3 jedničky?
- Kolik je možností, jak rozdělit všechny známky?
- Kolik je možností, jak rozdělit všechny známky, pokud má Kát'a K. dostat jedničku, Marek s Radimem trojku a Pavel má propadnout?

Při vybírání studentů, kteří dostanou známku záleží pouze na tom, jakou známku jim přidělíme, ne na tom, zda ji dostali jako první nebo třetí  $\Rightarrow$  sestavujeme kombinace

a) možnosti, jak přidělit 3 jedničky

vybíráme 3 studenty ze 31  $\Rightarrow \binom{31}{3}$  možností

b) jak rozdělit všechny známky

budeme postupně rozdělovat jednotlivé známky, počet studentů, které máme k dispozici se postupně zmenšuje, možnosti výběru jednotlivých známek můžeme kombinovat  $\Rightarrow$  celkový výsledek získáme vynásobením jednotlivých možností

- jedničky: vybíráme 3 studenty ze 31  $\Rightarrow \binom{31}{3}$  možností
- dvojky: vybíráme 8 studentů z 28  $\Rightarrow \binom{28}{8}$  možností
- trojky: vybíráme 15 studentů z 20  $\Rightarrow \binom{20}{15}$  možností
- čtyřky: vybíráme 4 studenty z 5  $\Rightarrow \binom{5}{4}$  možností
- pětka: jediný student  $\Rightarrow \binom{1}{1} = 1$  možností

$\Rightarrow$  celkem  $\binom{31}{3} \cdot \binom{28}{8} \cdot \binom{20}{15} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1}$  možností

c) jak rozdělit známky při splnění omezujících podmínek

čtyři studenti mají známku jasnou před losováním  $\Rightarrow$  začínáme vybírat ze 27 studentů, u jedniček vybíráme pouze 2 (jednu jedničku má Káťa K.), u trojek vybíráme pouze 13 studentů (trojky má Marek s Radimem) a pětku nerozdáváme

$\Rightarrow$  celkem  $\binom{27}{2} \cdot \binom{25}{8} \cdot \binom{17}{13} \cdot \binom{4}{4}$  možností

**Poznámka:** Při rozdělování známek můžeme samozřejmě postupovat i od pětěk k jedničkám.

V bodu b) bychom pak získali výraz  $\binom{31}{1} \cdot \binom{30}{4} \cdot \binom{26}{15} \cdot \binom{11}{8} \cdot \binom{3}{3}$  jehož hodnota je stejná.

Další možností, jak vyřešit bod b) je výraz  $\frac{31!}{3! \cdot 15! \cdot 8! \cdot 4! \cdot 1!}$ , který odpovídá tomu, že bychom

třídu seřadili do řady, rozdali známky podle pořadí a výsledek vydělili počtem možností, jak mezi sebou promíchat studenty s stejnými známkami.

**Př. 6:** Ve třídě je 34 míst v lavicích po dvou. Cvičení z matematiky se účastní 14 studentů (8 dívek a 6 kluků). Kolika způsoby se mohou studenti rozesadit po třídě:

- bez dalších podmínek
- tak, aby seděli po dvojicích
- tak, aby seděli po dvojicích stejného pohlaví
- tak, aby v žádné lavici neseděli dva studenti
- tak, aby každý kluk seděl s dívkou a zbývající dívky seděly spolu

a) bez dalších podmínek

postupně přidělujeme jednotlivých studentům židle:

1. student ... 34 možností  
 2. student ... 33 možností  
 ..  
 14. student ... 21 možností  $\Rightarrow 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 21$

jinak:

ze třiceti čtyř míst vybíráme 14, záleží na pořadí (jiné pořadí vybrání míst znamená, že jiné rozesazení studentů, protože prvního studenta dáváme vždy na první vybrané místo)  $\Rightarrow$  sestavujeme 14 členné variace ze 34  $\Rightarrow V_{14}(34) = \frac{34!}{20!} = 34 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 21$  možností

ještě jinak:

vybereme 14 míst ze 34 na pořadí nezáleží (jde jen o to, které z míst obsadíme)

$$K_{14}(34) = \binom{34}{14} \text{ možností}$$

teď rozesadíme studenty  $\Rightarrow$  vytváříme všechna možná pořadí 14 studentů  $\Rightarrow 14!$  možností  
možnosti výběru lavic i studentů navzájem kombinujeme (na každém výběru lavic, můžeme vyzkoušet všechna uspořádání studentů)  $\Rightarrow$  možnosti navzájem násobíme

$$\text{celkem: } \binom{34}{14} \cdot 14! = \frac{34!}{20! \cdot 14!} \cdot 14! = \frac{34!}{20!} \text{ možností}$$

b) tak, aby seděli po dvojicích

budeme postupovat podobně jako v poslední verzi předchozího bodu, nejdříve vybereme místa a na ně rozesadíme studenty:

možnosti výběru míst:  $\binom{17}{7}$  - ze sedmnácti lavic vybíráme 7 (14 míst), na pořadí nezáleží

možnosti rozesazení studentů na vybraná místa:  $14!$

$$\text{celkem: } \binom{17}{7} \cdot 14!$$

c) tak, aby seděli po dvojicích stejného pohlaví

podobně předchozímu bodu, nejdříve rozesadíme dívky, potom chlapce

dívky:  $\binom{17}{4} \cdot 8!$  (ze sedmnácti lavic vybíráme 4, pak rozesadíme 8 dívek)

dívky:  $\binom{13}{3} \cdot 6!$  (ze zbývajících 13 lavic vybíráme 3, pak rozesadíme 6 chlapců)

možnosti mezi sebou násobíme  $\Rightarrow$  celkem:  $\binom{17}{4} \cdot 8! \cdot \binom{13}{3} \cdot 6!$  možností

(pokud nejdříve rozesadíme chlapce získáme výraz  $\binom{17}{3} \cdot 8! \cdot \binom{14}{4} \cdot 6!$ , který má stejnou hodnotu)

d) tak, aby v žádné lavici neseděli dva studenti

pokud nemají v žádné lavici sedět dva studenti musíme:

vybrat lavice: vybíráme 14 lavic ze 17, nezáleží na pořadí  $\Rightarrow \binom{17}{14}$  možností

do vybraných lavic rozesadíme studenty  $\Rightarrow 14!$

každý ze studentů má možnost si vybrat ze dvou míst  $\Rightarrow 2^{14}$  možností

jednotlivé možnosti můžeme navzájem kombinovat  $\Rightarrow$  možnosti mezi sebou násobíme:

$$\text{celkem: } \binom{17}{14} \cdot 14! \cdot 2^{14}$$

e) tak, aby každý kluk seděl s dívkou a zbývající dívky seděly spolu bude obsazeno 7 lavic

vybereme 7 lavic, nezáleží na pořadí:  $\binom{17}{7}$  možností

vybereme lavice, ve které budou sedět dvě dívky: 7 možností

vybereme dvě dívky, které sedí spolu a posadíme na dvě místa v lavici:  $\binom{8}{2} \cdot 2$

rozesadíme zbývající dívky do lavic:  $6!$  možností

rozesadíme zbývající chlapce do lavic:  $6!$  možností

dvojice v lavice můžeme prohazovat v rámci lavice:  $2^6$  možností

jednotlivé možnosti můžeme navzájem kombinovat  $\Rightarrow$  možnosti mezi sebou násobíme:

celkem:  $\binom{17}{7} \cdot 7 \cdot \binom{8}{2} \cdot 2 \cdot 6! \cdot 6! \cdot 2^6$  možností

**Dodatek:** Způsobů jak sestavovat výrazy, které jsou řešením jednotlivých bodů je většinou více. Například pro poslední bod můžeme sestavit i výraz

$\binom{17}{1} \cdot \binom{8}{2} \cdot 2 \cdot \binom{16}{6} \cdot 6! \cdot 6! \cdot 2^6$ . Kdyby byl některých ze studentů hotový dřív, můžete

mu ho zadat na rozluštění (postupně: vybereme jednu lavici pro dvě holky, vybereme tyto dvě holky, rozesadíme je do lavice, vybereme lavice pro šest smíšených dvojic, rozesadíme holky, rozesadíme kluky, proházíme dvojice v lavicích).

**Shrnutí:** Při řešení kombinovaných úloh musíme postupovat postupně.