9.1.16 Binomická věta

Předpoklady: 9114

Řádky Pascalova trojúhelníku nám něco připomínají. Kdysi dávno v prvním ročníku jsme se učili vzorce na umocňování dvojčlenu.

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

Př. 1: Napiš další řádek předchozí tabulky pro $(a+b)^6$.

Z tabulky je vidět:

- mocniny *a* se postupně snižují od hodnoty mocniny k nule
- mocniny *b* se postupně zvyšují od nule k hodnotě mocniny
- číselné koeficienty v mnohočlenu, který vznikl umocněním odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny $(a+b)^6$ potřebujeme sedmý řádek Pascalova trojúhelníku.

$\Rightarrow (a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Př. 2: Odhadni vzorec pro výraz $(a+b)^n$.

Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě:

- mocniny *a* se postupně snižují od *n* k nule
- mocniny *b* se postupně zvyšují od nule k *n*
- číselné koeficienty v mnohočlenu, který vznikl umocněním odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny $(a+b)^n$ potřebujeme $(n+1)$*-ní* řádek Pascalova trojúhelníku (řádek s kombinačními čísly s horní hodnotou *n*)

$$\Rightarrow (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Než si tento výsledek zapíšeme jako větu, musíme si jej alespoň trochu ověřit.
Jak vznikají jednotlivé členy rozvoje?
Zkusíme si to na nejnižších mocninách:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2+2ab+b^2$

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky $\Rightarrow$

- člen a^2 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $a\cdot a$
- člen ab je ve výsledku dvakrát, vznikl součtem členů $a\cdot b + b\cdot a$

- člen b^2 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $b \cdot b$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$$
$$= a \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot b =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky $\Rightarrow$

- člen a^3 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $a \cdot a \cdot a$
- člen a^2b je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů $a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot b$
- člen ab^2 je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů $b \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b$
- člen b^3 je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen $b \cdot b \cdot b$

$\Rightarrow$ jednotlivé členy v rozvoji vznikají součtem uspořádaných *k*-tic z *a* a *b* (při násobení nezáleží na pořadí)

- člen a^3 je v rozvoji jednou, protože existuje pouze jedna uspořádaná trojice ze tří *a*
- člen a^2b je v rozvoji třikrát, protože existují tři uspořádané trojice ze dvou *a* a jednoho *b*

Jak určíme počet uspořádaných trojic ze dvou *a* a jednoho *b* $\Rightarrow$ permutace s opakováním ze dvou a jednoho prvku $\Rightarrow$ $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ možnosti

Jak to bude v rozvoji $(a+b)^n$ třeba u členu $a^{n-2}b^2$?

máme $(n-2)$ krát *a* a 2 krát *b* $\Rightarrow$ uspořádané *n*-tice z $(n-2)$ a 2 prvků $\Rightarrow$

$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$ možností

Jak to bude v rozvoji $(a+b)^n$ třeba u členu $a^{n-k}b^k$?

máme $(n-k)$ krát *a* a *k* krát *b* $\Rightarrow$ uspořádané *n*-tice z $(n-k)$ a *k* prvků $\Rightarrow$

$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ možností

Binomická věta:
Pro všechna čísla *a*, *b* a každé přirozené číslo *n* platí:
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dodatek: Pomocí sumy je zápis binomické věty značně úspornější: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Názvosloví:

- **binom** – dvojčlen (odtud jméno věty)
- **binomický koeficient** – jiné pojmenování kombinačních čísel na pravé straně vzorce (v zahraničí se používá obecně místo termínu kombinační číslo)
- **binomický rozvoj** – pravá strana vzorce v binomické větě

Př. 3: (BONUS) Dokaž matematickou indukcí binomickou větu.

Postupujeme ve dvou krocích:

1. $k=1$

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1=a+b \qquad \text{vzorec platí}$$

2. předpokládáme platnost pro *k*, chceme dokázat platnost pro $k+1$

víme: $(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b^1+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k$

platí:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=$$

$$=\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b^1+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\right]\cdot(a+b)$$

zaměříme se na prostředek:

$$\left[\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^m+\binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1}+\ldots\right](a+b)\Rightarrow$$

$$\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^m\cdot b+\binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1}\cdot a+\ldots=\ldots+\binom{k}{m}a^{k-m}b^{m+1}+\binom{k}{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots=$$

$$=\ldots+\left[\binom{k}{m}+\binom{k}{m+1}\right]a^{k-m}b^{m+1}+\ldots=\ldots+\binom{k+1}{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots$$

získali jsme člen rozvoje dalšího řádu $\Rightarrow$ vzorec platí i pro $k+1$

věta je dokázána

Př. 4: Vypočti pomocí binomické věty:

a) $(a+b)^7$ b) $(x-y)^5$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^6$ d) $\left(4x-\frac{y^2}{2}\right)^4$

a)

$$(a+b)^7=\binom{7}{0}a^7+\binom{7}{1}a^6b^1+\binom{7}{2}a^5b^2+\binom{7}{3}a^4b^3+\binom{7}{4}a^3b^4+\binom{7}{5}a^2b^5+\binom{7}{6}ab^6+\binom{7}{7}b^7=$$

$$=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

b)

$$(x-y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4(-y)^1+\binom{5}{2}x^3(-y)^2+\binom{5}{3}x^2(-y)^3+\binom{5}{4}x^1(-y)^4+\binom{5}{5}(-y)^5=$$

$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$$

c)

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^6=\binom{6}{0}1^6+\binom{6}{1}1^5\left(\sqrt{2}\right)^1+\binom{6}{2}1^4\left(\sqrt{2}\right)^2+\binom{6}{3}1^3\left(\sqrt{2}\right)^3+\binom{6}{4}1^2\left(\sqrt{2}\right)^4+\binom{6}{5}1^1\left(\sqrt{2}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\sqrt{2}\right)^6=$$

$$=1+6\sqrt{2}+15\cdot 2+20\cdot 2\sqrt{2}+15\cdot 4+6\cdot 4\sqrt{2}+8=99+70\sqrt{2}$$

d)

$$\left(4x-\frac{y^2}{2}\right)^4=$$

$$=\binom{4}{0}(4x)^4+\binom{4}{1}(4x)^3\left(-\frac{y^2}{2}\right)^1+\binom{4}{2}(4x)^2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2+\binom{4}{3}(4x)\left(-\frac{y^2}{2}\right)^3+\binom{4}{4}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^4=$$

$$=256x^4-128x^3y^2+24x^2y^4-3xy^6+\frac{y^8}{16}$$

Pedagogická poznámka: Častou chybou při počítání předchozího příkladu je, že studenti příliš pospíchají, snaží se spočítat příklad najednou a tak produkují obrovské množství chyb. Doporučuji počítat příklady tak, jak jsou uvedeny v učebnici, tedy v první fázi jenom dosadit do vzorce a dopočítávání kombinačních čísel, úpravy provádět až poté.

Př. 5: Petáková:
strana 148/cvičení 76 e) f)
strana 148/cvičení 77 a)

Shrnutí: Vzorec pro umocnění dvojčlenu $(a+b)^n$ obsahuje jako koeficienty řadu kombinačních čísel $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, …, $\binom{n}{n}$.