

9.1.15 Binomická věta

Př. 1: Napiš další řádek předchozí tabulky pro $(a+b)^6$.

$$\Rightarrow (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Př. 2: Odhadni vzorec pro výraz $(a+b)^n$.

$$\Rightarrow (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Př. 3: (BONUS) Dokaž matematickou indukcí binomickou větu.

Postupujeme ve dvou krocích:

1. $k=1$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1 = a+b \quad \text{vzorec platí}$$

2. předpokládáme platnost pro k , chceme dokázat platnost pro $k+1$

$$\text{víme: } (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^1b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

platí:

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) = \\ &= \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^1b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] \cdot (a+b) \end{aligned}$$

zaměříme se na prostředek:

$$\begin{aligned} &\left[\dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^m + \binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1} + \dots \right] (a+b) \Rightarrow \\ &\dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^m \cdot b + \binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1} \cdot a + \dots = \dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^{m+1} + \binom{k}{m+1}a^{k-m}b^{m+1} + \dots = \\ &= \dots + \left[\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} \right] a^{k-m}b^{m+1} + \dots = \dots + \binom{k+1}{m+1}a^{k-m}b^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

Př. 4: Vypočti pomocí binomické věty:

a) $(a+b)^7$

b) $(x-y)^5$

c) $(1+\sqrt{2})^6$

d) $\left(4x - \frac{y^2}{2}\right)^4$

a)

$$\begin{aligned} (a+b)^7 &= \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b^1 + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7 = \\ &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \end{aligned}$$

b)

$$(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 = \\ = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

c)

$$(1+\sqrt{2})^6 = \binom{6}{0}1^6 + \binom{6}{1}1^5(\sqrt{2})^1 + \binom{6}{2}1^4(\sqrt{2})^2 + \binom{6}{3}1^3(\sqrt{2})^3 + \binom{6}{4}1^2(\sqrt{2})^4 + \binom{6}{5}1^1(\sqrt{2})^5 + \binom{6}{6}(\sqrt{2})^6 = \\ = 1 + 6\sqrt{2} + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 2\sqrt{2} + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 4\sqrt{2} + 8 = 99 + 70\sqrt{2}$$

d)

$$\left(4x - \frac{y^2}{2}\right)^4 = \\ = \binom{4}{0}(4x)^4 + \binom{4}{1}(4x)^3\left(-\frac{y^2}{2}\right)^1 + \binom{4}{2}(4x)^2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}(4x)\left(-\frac{y^2}{2}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^4 = \\ = 256x^4 - 128x^3y^2 + 24x^2y^4 - 3xy^6 + \frac{y^8}{16}$$

Př. 5: Petáková:

strana 148/cvičení 76 e) f)

strana 148/cvičení 77 a)