9.1.17 Užití binomické věty

Př. 1: Urči šestý člen binomického rozvoje $\left(2xy+\frac{x}{y^2}\right)^{12}$

šestý člen bude mít jako dolní číslo binomického koeficientu číslo 5 $\Rightarrow$

$$\binom{12}{5}(2xy)^7\left(\frac{x}{y^2}\right)^5=\binom{12}{5}2^7x^7y^7\frac{x^5}{y^{10}}=\binom{12}{5}2^7\frac{x^{12}}{y^3}=101376\frac{x^{12}}{y^3}$$

Př. 2: Urči absolutní člen binomického rozvoje $\left(2x^3+\frac{3}{2x}\right)^{12}$.

- pokrácení neznámé $\Rightarrow$ $\left(x^3\right)^a\left(\frac{1}{x}\right)^b=1$ $\Rightarrow$ $3a+b=0\Rightarrow b=3a$
- $a+b=12$ (platnost binomické věty)

$\Rightarrow$ $a+3a=12\Rightarrow a=3;b=9$ $\Rightarrow$ hledáme desátý člen (pro $k=10$)

hledaný člen: $\binom{12}{9}\left(2x^3\right)^3\left(\frac{3}{2x}\right)^9=\binom{12}{9}2^3x^9\frac{3^9}{2^9x^9}=\binom{12}{9}\frac{3^9}{2^6}=\frac{1082565}{16}$

Př. 3: Pomocí binomické věty vyjádři v algebraickém tvaru komplexní čísla:

a) $(1-i)^7$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

$$(1-i)^7=\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}1^6(-i)^1+\binom{7}{2}1^5(-i)^2+\binom{7}{3}1^4(-i)^3+\binom{7}{4}1^3(-i)^4+\binom{7}{5}1^2(-i)^5+$$

$$+\binom{7}{6}1(-i)^6+\binom{7}{7}(-i)^7=1-7i+21i^2-35i^3+35i^4-21i^5+7i^6-i^7=$$

$$=1-7i-21-35i+35-21i-7+i=8-8i$$

$$\binom{5}{0}\left(\sqrt{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\sqrt{3}\right)^4(-i)^1+\binom{5}{2}\left(\sqrt{3}\right)^3(-i)^2+\binom{5}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2(-i)^3+\binom{5}{4}\left(\sqrt{3}\right)(-i)^4+\binom{5}{5}(-i)^5=$$

$$=9\sqrt{3}-5\cdot9i+10\cdot3\sqrt{3}\cdot i^2-10\cdot3i^3+5\sqrt{3}\cdot i^4-i^5=9\sqrt{3}-45i-30\sqrt{3}+30i+5\sqrt{3}-i=$$

$$=-16\sqrt{3}-16i$$

Př. 4: Vypočti $1,01^5$ bez kalkulačky pomocí binomické věty.

$$1,01^5=(1+0,01)^5=\left(1+10^{-2}\right)^5=$$

$$=\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}1^4\left(10^{-2}\right)^1+\binom{5}{2}1^3\left(10^{-2}\right)^2+\binom{5}{3}1^2\left(10^{-2}\right)^3+\binom{5}{4}1\left(10^{-2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(10^{-2}\right)^5=$$

$$=1+5\cdot10^{-2}+10\cdot10^{-4}+10\cdot10^{-6}+5\cdot10^{-8}+10^{-10}=1,0510100501$$

Př. 5: Urči součet $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

$$=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n=(1+1)^n=2^n$$

Př. 6: Pomocí binomické věty dokaž, že výraz 6^n-1 je pro každé přirozené číslo n dělitelný pěti.

$$(5+1)^n-1=(a+b)^n=\left[\binom{n}{0}5^n+\binom{n}{1}5^{n-1}1^1+\binom{n}{2}5^{n-2}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n\right]-1=$$

$$=\binom{n}{0}5^n+\binom{n}{1}5^{n-1}1^1+\binom{n}{2}5^{n-2}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1}+\underbrace{\underbrace{\binom{n}{n}}_{1}1^n-1}_{0}=$$

$$=5\left[\binom{n}{0}5^{n-1}+\binom{n}{1}5^{n-2}+\binom{n}{2}5^{n-3}1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\right]$$

Př. 7: Zaokrouhli číslo $1,01^7$ na setiny.

Půjdeme na to přes binomickou větu:

$1,01^7=(1+0,01)^7=$

$$=\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}1^6\left(10^{-2}\right)^1+\binom{7}{2}1^5\left(10^{-2}\right)^2+\binom{7}{3}1^4\left(10^{-2}\right)^3+\binom{7}{4}1^3\left(10^{-2}\right)^4+$$

$$+\binom{7}{5}1^2\left(10^{-2}\right)^5+\binom{7}{6}1\left(10^{-2}\right)^6+\binom{7}{7}\left(10^{-2}\right)^7=$$

$$=\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}10^{-2}+\binom{7}{2}10^{-4}+\binom{7}{3}10^{-6}+\binom{7}{4}10^{-8}+\binom{7}{5}10^{-10}+\binom{7}{6}10^{-12}+\binom{7}{7}10^{-14}=$$

členy binomického rozvoje se od leva doprava postupně zmenšují (kvůli zvětšující záporné mocnině desítky) $\Rightarrow$ musíme najít nejmenší člen, který ještě ovlivňuje výsledek na tisíciny

$\Rightarrow$ zkusíme člen $\binom{7}{2}10^{-4}=21\cdot 10^{-4}$ - členy více napravo jsou ještě menší $\Rightarrow$

$$1,01^7\doteq\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}10^{-2}+\binom{7}{2}10^{-4}=1+7\cdot 10^{-2}+21\cdot 10^{-4}=1,0721\doteq 1,072$$

Číslo $1,01^7$ zaokrouhlené na tisíciny se rovná 1,072.

Př. 8: Petáková:
strana 148/cvičení 83
strana 149/cvičení 86
strana 149/cvičení 90
strana 149/cvičení 92 a) c) e)
strana 149/cvičení 99 b) d)