9.2.4 Pravděpodobnosti jevů II

Předpoklady: 9203

Než začneme počítat, důležité připomenutí z minulých hodin: „množinu všech možných výsledků musíme sestavovat tak, aby všechny výsledky byly rovnocenné.

Př. 1: Urči pravděpodobnost, že při hodu třemi stejnými mincemi padne:
a) dvakrát líc a jednou rub
b) třikrát líc

jako množinu všech možných výsledků budeme brát uspořádanou trojici typu (r,l,l) $\Rightarrow$ jako bychom mince odlišovali od sebe. Neodpovídá to zcela zadání příkladu, ale takto zavedené výsledky jsou rovnocenné
$\Rightarrow$ počet všech možných výsledků $2^3 = 8$
a) dvakrát líc a jednou rub
tři příznivé výsledky (r,l,l), (l,r,l), (l,l,r) $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{3}{8}$

b) třikrát líc
jeden příznivý výsledek (l,l,l) $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{8}$

Př. 2: Urči pravděpodobnost, že při deseti hodech mincí:
a) nepadne ani jeden rub
b) padne dvakrát líc a osmkrát rub
c) padne maximálně třikrát líc

množina všech výsledků = všechny uspořádané desetice s dvěma opakujícími se prvky (*r*, *l*) = výsledky jednotlivých hodů $\Rightarrow$ 2^{10} možností
a) nepadne ani jeden rub
jediný příznivý výsledek samé líce $(l,l,...,l)$ $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \doteq 0,00098$
b) padne dvakrát líc a osmkrát rub
příznivé výsledky = uspořádané desetice ze dvou líců a osmi rubů $\Rightarrow$ $\frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$ možností

pravděpodobnost: $\dfrac{\frac{10!}{2!\cdot 8!}}{2^{10}} = \frac{45}{1024} \doteq 0,044$

c) padne maximálně třikrát líc
musíme sečíst počty výsledků příznivých jednotlivým počtům líců
- žádný líc $\Rightarrow$ 1 možnost
- 1 líc (9 rubů) $\Rightarrow$ $\frac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$

- 2 líce (8 rubů) $\Rightarrow \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$
- 3 líce (7 rubů) $\Rightarrow \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$

$\Rightarrow$ celkem 176 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{176}{2^{10}} = \frac{176}{1024} = \frac{11}{64} = 0{,}169$

Poznámka: Počet příznivých výsledků v bodě b) můžeme zapsat také jako $\binom{10}{2}$ = počet možností, jak z deseti míst vybrat dvě, na která umístíme líce (umístění rubů je tím už dané). Analogicky pak můžeme postupovat u ostatních bodů $\Rightarrow$ řešení bodu c) $\frac{1+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}}{2^{10}}$.

Př. 3: Urči pravděpodobnost výsledku, který jsi dosáhl v předminulé hodině při 20 hodech mincí.

Stejný postup jako v předchozím příkladě:
množina všech výsledků = uspořádané dvacetice ze dvou prvků $\Rightarrow$ $2^{20} = 1048576$ možností
příznivé výsledky (12 líců 8 rubů) = $\frac{20!}{12!\cdot 8!} = 125970$
pravděpodobnost: $\frac{125970}{1048576} = 0{,}120$

Podobně můžeme určit pravděpodobnosti dalších výsledků našeho házení (uvádíme jenom výsledky z počtem líců menším než 11):

10 líců (10 rubů): $\frac{\frac{20!}{10!\cdot 10!}}{2^{20}} = 0{,}176$

9 líců (11 rubů): $\frac{\frac{20!}{9!\cdot 11!}}{2^{20}} = 0{,}160$

8 líců (12 rubů): $\frac{\frac{20!}{8!\cdot 12!}}{2^{20}} = 0{,}120$

7 líců (13 rubů): $\frac{\frac{20!}{7!\cdot 13!}}{2^{20}} = 0{,}074$

5 líců (15 rubů): $\frac{\frac{20!}{5!\cdot 15!}}{2^{20}} = 0{,}0149$

2 líce (18 rubů): $\frac{\frac{20!}{2!\cdot 18!}}{2^{20}} = 0{,}00018$

$\Rightarrow$ z předchozích výsledků je zřejmé, proč naprostá většina pokusů skončila v rozmezí 7-13 líců ze 2 hodů (z 26 pokusů se do tohoto rozmezí nevešel jediný), pravděpodobnost ostatních výsledků je velmi malá

Dodatek: S rostoucím počtem hodů navíc pravděpodobnost extrémních výsledků ještě velmi rychle klesá. Například při 100 hodech mincí má nejpravděpodobnější výsledek 50 líců, 50 rubů pravděpodobnost $\frac{\frac{100!}{50!\cdot 50!}}{2^{100}} = 0{,}080$, výsledek 20 líců, 80 rubů pravděpodobnost $\frac{\frac{100!}{20!\cdot 80!}}{2^{100}} = 0{,}0000000004$, výsledek 10 líců, 90 rubů pravděpodobnost $\frac{\frac{100!}{10!\cdot 90!}}{2^{100}} = 1{,}37\cdot 10^{-17}$ (řádově stáří vesmíru v sekundách), výsledek 0 líců, 100 rubů pravděpodobnost $\frac{1}{2^{100}} = 7{,}89\cdot 10^{-31}$. Je zřejmé, že na to, že nepadne méně než 15 líců by se dal vsadit i život.

Př. 4: Urči pravděpodobnost, se kterou padne při hodu dvěma kostkami:
a) součet 7
b) součet 8
Ještě před výpočtem odhadni, který ze součtu je pravděpodobnější.

Odhad: Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné, protože obě hodnoty můžeme jako součet získat třemi způsoby:

- $8 = 4+4 = 5+3 = 6+2$
- $7 = 4+3 = 5+2 = 6+1$

Jako množinu všech možných výsledků si vybereme množinu všech uspořádaných dvojic (jako bychom kostky rozlišovali) čísel od 1 do 6 $\Rightarrow$ rozlišujeme výsledky $(5,6)$ a $(6,5)$, které jsou tak rovnocenné výsledku $(5,5)$, který může padnout jediným způsobem $\Rightarrow$ všech možných výsledků je $6\cdot 6 = 36$.
a) součet 7
příznivé výsledky: $(6,1)$, $(1,6)$, $(5,2)$, $(2,5)$, $(4,3)$, $(3,4)$ $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$
pravděpodobnost $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \doteq 0{,}167$
b) součet 8
příznivé výsledky: $(6,2)$, $(2,6)$, $(5,3)$, $(3,5)$, $(4,4)$ $\Rightarrow$ 5 možností $\Rightarrow$
pravděpodobnost $\frac{5}{36} \doteq 0{,}139$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad bude u některých studentů vyžadovat osobní diskusi. Setkal jsem se s připomínkou, že dvě čtyřky přece také mohou padnout během házení dvakrát. To samozřejmě mohou, ale neznamená to, že v množině možných výsledků se bude dvakrát vyskytovat i tato dvojice, stejně jako se tam nevyskytuje dvakrát dvojice $(2,1)$.

Př. 5: Urči pravděpodobnost, že během pěti hodů kostkou nehodíš ani jednou šestku.

množina možných výsledků = uspořádané pětice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^5 možností počet příznivých výsledků: nesmí padnout 6 $\Rightarrow$ pětice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow$ 5^5 možností

pravděpodobnost: $\frac{5^5}{6^5} \doteq 0,402$

Př. 6: Urči pravděpodobnost, že během deseti hodů kostkou hodíš alespoň jednou šestku.

množina možných výsledků = uspořádané desetice ze šesti čísel $\Rightarrow$ 6^{10} možností
počet příznivých výsledků: musí padnout alespoň jednou 6 $\Rightarrow$ obrovské množství různých možností (1 šestka, 2 šestky, …) $\Rightarrow$ jednodušší bude spočítat opak = nepadne ani jedna šestka a odečíst od všech výsledků:

nepadne ani jedna šestka = desetice sestavujeme jen z pěti čísel $\Rightarrow$ 5^{10} možností

$\Rightarrow$ alespoň jednou šestka: $6^{10} - 5^{10}$

pravděpodobnost: $\frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}} = 1 - \frac{5^{10}}{6^{10}} \doteq 0,838$

Př. 7: Petáková:
strana 170/cvičení 4 a) b) d)
strana 170/cvičení 6 a) c)
strana 170/cvičení 8
strana 170/cvičení 12

Shrnutí: Není možné vyřešit příklady na výpočet pravděpodobnosti bez správného stanovení množiny všech výsledků.