10.2.1 Přírůstek argumentu, přírůstek funkce

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Hodiny má jediný cíl – připravit vše na co nejsnazší vysvětlení derivace v dalších hodinách. Proto je v celé hodině používám přesně stejný způsob zápisu i výpočtu jako v následujících hodinách.

Hlavním cílem celé kapitoly je studium derivace – matematické aparátu pro zachycení změn funkčních závislostí.

Máme funkci: $y = f(x)$. Tato funkce vyrábí z hodnot proměnné *x* hodnoty proměnné *y*.
Proměnná *x* (ze které vycházíme) se nazývá **argument funkce**. O proměnné *y* pak říkáme, že je **funkcí argumentu *x***.

O přírůstcích (změnách) jsme už mluvili ve fyzice. Například ve slavném vzorci $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ vystupují dva: Δs a Δt:

- Δs = změna dráhy, říká, jak se dráha změnila $\Rightarrow$ $\Delta s = s_2 - s_1$
- Δt = změna času, říká, jak se změnil čas $\Rightarrow$ $\Delta t = t_2 - t_1$

Stejným způsobem je možné přírůstek definovat pro libovolnou veličinu.

Př. 1: Urči změny následujících veličin:
a) auto zrychlilo z 50 km/h na 90 km/h
b) průměrná známka z matematiky vzrostla z 2,26 na 2,83
c) účastník kursu zhubnul za dva měsíce z 112 kg na 101 kg

a) auto zrychlilo z 50 km/h na 90 km/h
$\Delta v = v_2 - v_1 = 90 - 50\,\text{km/h} = 40\,\text{km/h}$
b) průměrná známka z matematiky vzrostla z 2,26 na 2,83
$\Delta n = n_2 - n_1 = 2{,}83 - 2{,}26 = 0{,}57$
c) účastník kursu zhubnul za dva měsíce z 112 kg na 101 kg
$\Delta m = m_2 - m_1 = 101 - 112\,\text{kg} = -11\,\text{kg}$

V matematice se většinou používá trošku jiné značení:

- místo počáteční hodnoty x_1 píšeme x_0
- místo konečné hodnoty x_2 píšeme x

$\Rightarrow$ **přírůstek argumentu** $\Delta x = x - x_0$

Definice:
Nechť funkce *f* je definována na nějakém okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ a nechť $x \in \mathbf{U}_\delta(x_0)$. Rozdíl $x - x_0$ nazýváme přírůstek argumentu v bodě x_0 a označujeme $\Delta x = x - x_0$.

analogicky můžeme psát **přírůstek funkce** (funkční hodnoty):

- místo počáteční funkční hodnoty $y_1 = f(x_1)$ píšeme $y_0 = f(x_0)$

- místo konečné hodnoty $y_2 = f(x_2)$ píšeme $y = f(x)$

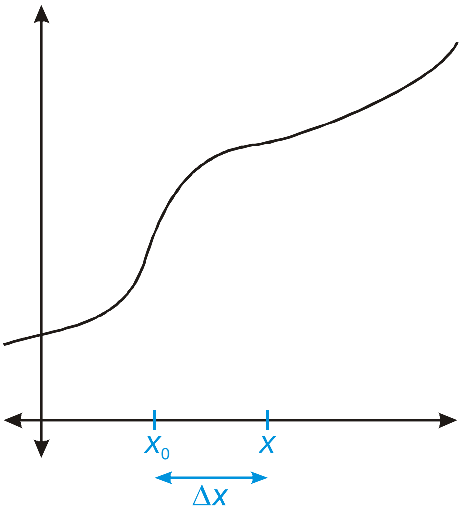
$\Rightarrow$ **přírůstek funkce** $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$

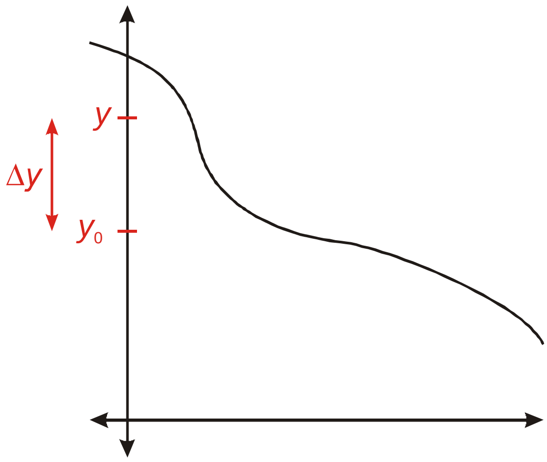
Definice:

Nechť funkce *f* je definována na nějakém okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ a nechť $x \in \mathbf{U}_\delta(x_0)$. Rozdíl $f(x) - f(x_0)$ nazýváme přírůstek funkce v bodě x_0 odpovídající přírůstku $\Delta x = x - x_0$ argumentu a označujeme $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$.

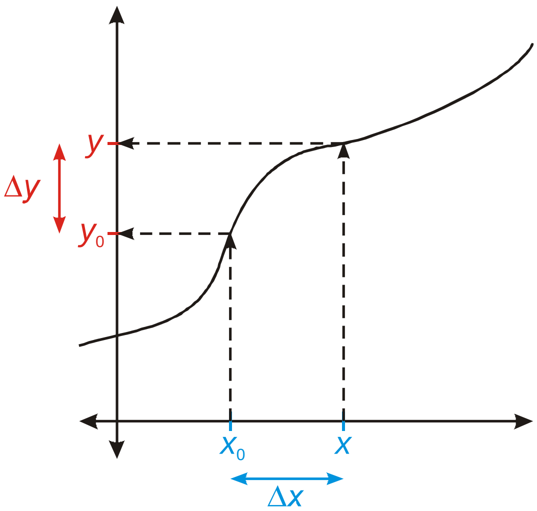
Protože bod *x* můžeme vyjádřit pomocí přírůstku argumentu takto: $x = x_0 + \Delta x$, píšeme většinou místo $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$, pro přírůstek pak $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

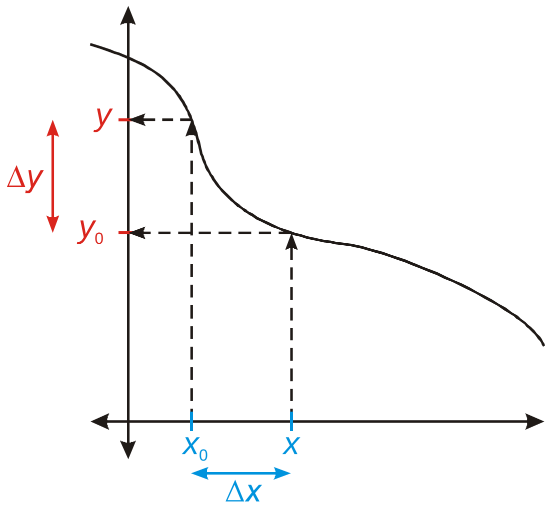
Př. 2: Dokresli do obrázku, k vyznačenému Δx odpovídající Δy a obráceně k vyznačenému Δy odpovídající Δx.





Stačí nakreslit do obrázku funkční hodnoty bodů x_0 a x (vlevo), případně najít vzory bodů y_0 a *y* (vpravo).





Př. 3: Jaké podmínku musí splňovat funkce $y = f(x)$, aby platilo, že kladnému přírůstku argumentu Δx odpovídá kladný přírůstek funkce Δy?

kladný přírůstek argumentu: $\Delta x > 0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x > x_0$
kladný přírůstek funkce: $\Delta y > 0 \Rightarrow y = y_0 + \Delta y > y_0$
$\Rightarrow$ pokud má funkce $y = f(x)$ odpovídat kladnému přírůstku argumentu kladný přírůstek funkce musí funkce z většího hodnoty argumentu x vyrobit větší hodnotu y $\Rightarrow$ funkce musí být rostoucí.

S přírůstky se dá také počítat:

Máme funkci $y = x^2 + 1$. Jaký je přírůstek této funkce v bodě 2 odpovídající přírůstku argumentu $\Delta x = 1$?
$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ $\Rightarrow$ spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$
- $y = f(x_0 + \Delta x) = x^2 + 1 = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 = (2+1)^2 + 1 = 10$

$\Delta y = y - y_0 = 10 - 5 = 5$
Výsledek můžeme spočítat i obecně a pak dosadit:
$y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1$
$y = f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1$
$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$
$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$
Dosazení: $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 5$

Př. 4: Vyjádři přírůstek funkce $y = 2x + 1$ obecně. Poté dosaď do vypočteného výrazu tak, aby si určil konkrétní hodnoty v bodech 10, -3 odpovídající přírůstku argumentu $\Delta x = 2$.

$y_0 = f(x_0) = 2x_0 + 1$
$y = f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x) + 1$
$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x) + 1 - [2x_0 + 1] = 2x_0 + 2\Delta x + 1 - 2x_0 - 1 = 2\Delta x$
Zajímavé. Výsledek neobsahuje bod, ve kterém máme přírůstek zjistit.
Dosazení: $\Delta y = 2\Delta x = 2 \cdot 2 = 4$
Přírůstek funkce $y = 2x + 1$ se při přírůstku argumentu $\Delta x = 2$ rovná 4 v každém bodě.

Př. 5: Vyjádři přírůstek funkce $y = 2x + 1$ v bodech 10, -3 odpovídající přírůstku argumentu $\Delta x = 2$ okamžitým dosazením.

bod 10
$\Delta y = y - y_0$ $\Rightarrow$ spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = 2x_0 + 1 = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

- $y = 2x + 1 = 2(x + \Delta x) + 1 = 2(10 + 2) + 1 = 25$

$\Delta y = y - y_0 = 25 - 21 = 4$

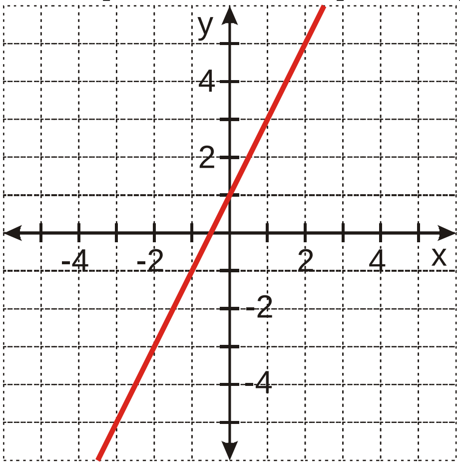
bod -3

$\Delta y = y - y_0 \Rightarrow$ spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = 2x_0 + 1 = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$
- $y = 2x + 1 = 2(x + \Delta x) + 1 = 2(-3 + 2) + 1 = -1$

$\Delta y = y - y_0 = -1 - (-5) = 4$

Na první pohled je u předchozího příkladu zajímavé, že přírůstek funkce nezávisí na bodě, ve kterém ho počítáme. Na druhý pohled je zřejmé, že to tak být musí. Funkce $y = 2x + 1$ je lineární, ve všech bodech roste stejně rychle a tak je úplně jedno, kde zjišťujeme přírůstek funkce, protože ten záleží pouze na přírůstku argumentu a směrnici přímky.



Př. 6: Vyjádři přírůstek funkce $y = x^2$ v bodě x_0 odpovídající přírůstku argumentu Δx.

Můžeme postupovat pouze druhým obecným způsobem:

$\Delta y = y - y_0 = x^2 - x_0^2 = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$

Stejný výsledek jako při počítání u funkce $y = x^2 + 1$.

Shrnutí: $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$