10.2.12 Průběh funkce III (prohnutí)

Předpoklady: 10211

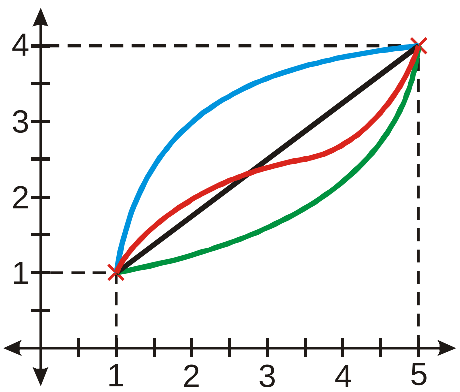
Pedagogická poznámka: Při poctivém probírání by tato látka zabrala dvě celé vyučovací hodiny. Studenti z toho nebudou příliš nadšení, je zde příliš mnoho definic a povídání.

Už třetí hodinu se snažíme, co nejlépe popsat graf funkce. Pokud známe předpis funkce a umíme ji zderivovat, dokážeme zjistit:

- definiční obor
- funkční hodnoty (dosazením, už od malička)
- monotónnost (podle znaménka první derivace)
- lokální extrémy (podle znaménka první a druhé derivace)
- limity v nevlastních bodech a v nevlastní limity ve vlastních bodech
- asymptoty

Stačí to k tomu, abychom nakreslili přibližně graf funkce?

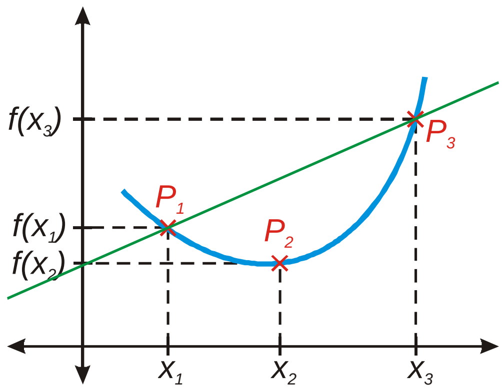
Př. 1: Funkce $y = f(x)$ má lokální minimum v bodě $[1,1]$ a lokální maximum v bodě $[5;4]$. V intervalu $\langle 1;5\rangle$ je funkce rostoucí (její první derivace je v tomto intervalu kladná). Nakresli různé možnosti, jak může vypadat graf této funkce pro $x \in \langle 1;5\rangle$.



Možností je nekonečně mnoho. Z obrázku je vidět, že je můžeme rozdělit do několika skupin:

- černá, přímá čára
- modrá čára, která je vždy na černou čarou, vypadá jako část „kopečku“
- zelená čára, která je vždy pod černou čarou, vypadá jako část „ďolíku“
- červená čára, která se skládá ze dvou částí, jedna část se chová jako modrá čára, druhá část se chová jako zelená čára (je samozřejmé, že by červená čára mohla mít více částí, každá z nich by se však podobala jednomu ze tří předchozích druhů)

Musíme se naučit jednotlivé druhy funkcí rozeznávat. Jak poznáme (porovnáváním), že má křivka tvar „ďolíku“?



Pokud libovolně zvolíme na ose *x* tři body $x_1 < x_2 < x_3$, získáme na grafu funkce tři body $P_1[x_1; f(x_1)]$, $P_2[x_2; f(x_2)]$ a $P_3[x_3; f(x_3)]$.

Z obrázku je vidět, že bod P_2 vždy leží pod přímkou P_1P_3 $\Rightarrow$ to už by bylo možné vyjádřit početně:

rovnice přímky P_1P_3 (dosazujeme do směrnicového tvaru) $(y - y_0) = k(x - x_0)$:

$$x_0 = x_1,\ y_0 = y_1 = f(x_1),\ k = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \ \Rightarrow\ y - f(x_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1)$$

$$y = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

zkoumáme hodnotu v bodě x_2 $\Rightarrow$ dosadíme: $x = x_2,\ y = y_2 = f(x_2)$

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

pokud bod leží na přímce nebo pod ní, změníme rovnost na nerovnost:

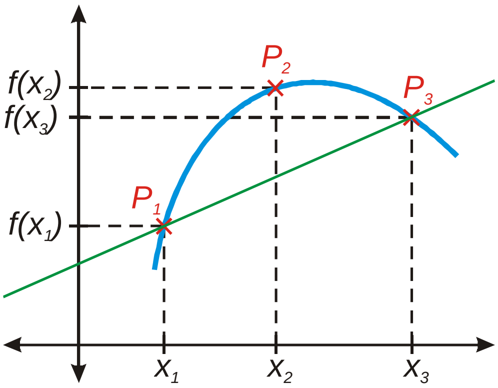
$$f(x_2) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$ - to je pro definici přímo ideální $\Rightarrow$

Funkce *f* se nazývá konvexní (má tvar „ďolíku“) v intervalu *I*, právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$ splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí $f(x_2) \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$

(bod $P_2[x_2; f(x_2)]$ leží pod přímkou P_1P_3 nebo na ní).

Pokud platí **ostrá nerovnost** $f(x_2) < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)$ říkáme, že funkce je v intervalu *I* **ryze konvexní.**

Př. 2: Analogicky podle předchozího postupu odvoď a vyslov definici funkce, která je v intervalu I konkávní (má tvar „kopečku“).



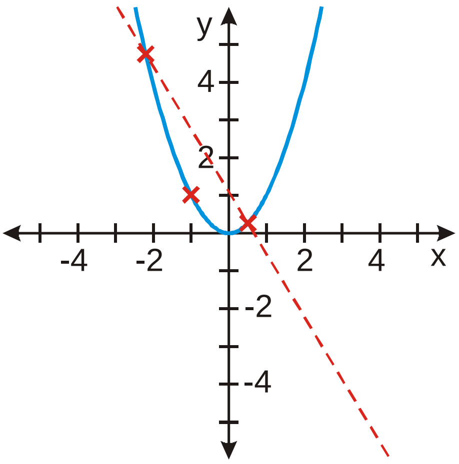
Velmi podobný obrázek jako u konvexní funkce, bod P_2 leží vždy nad přímkou P_1P_3 $\Rightarrow$ je splněna nerovnost $f(x_2) \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)$.

Funkce *f* se nazývá konkávní (má tvar „kopce“) v intervalu I, právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$ splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí $f(x_2) \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)$ (bod $P_2\left[x_2; f(x_2)\right]$ leží nad přímkou P_1P_3 nebo na ní).

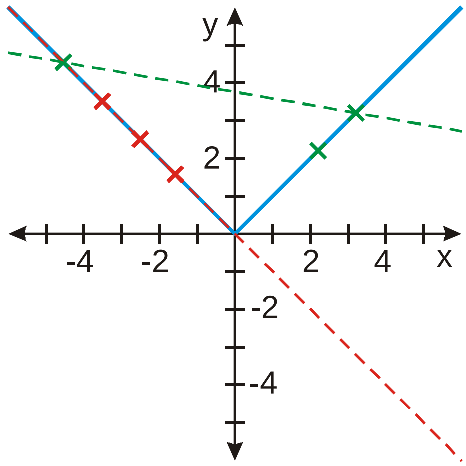
Pokud platí **ostrá nerovnost** $f(x_2) > \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)$ říkáme, že funkce je v intervalu I **ryze konkávní.**

Př. 3: Nakresli obrázek zadané funkce a rozhodni zda jsou v daném intervalu konvexní, ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní nebo zda nemají žádnou z těchto vlastností.

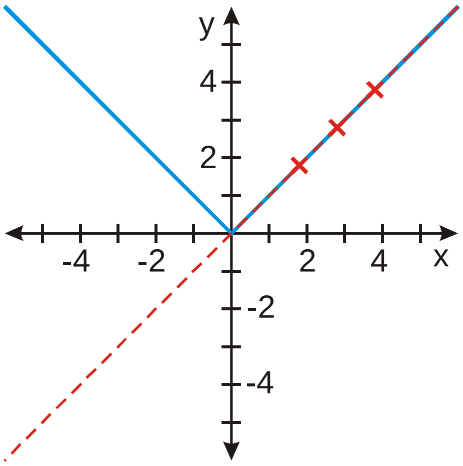
a) $y = x^2$ v intervalu $\langle -4; 4 \rangle$
b) $y = |x|$ v intervalu $\langle -4; 4 \rangle$
c) $y = |x|$ v intervalu $\langle 1; 5 \rangle$
d) $y = x^3$ v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$



Z obrázku je zřejmé, že funkce $y = x^2$ je v intervalu $\langle -4; 4 \rangle$ ryze konvexní.

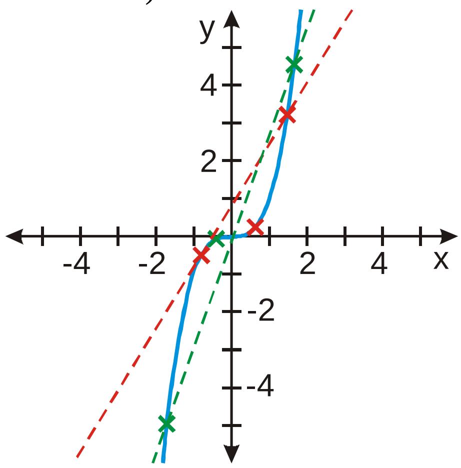


Z obrázku je zřejmé, že funkce $y = |x|$ je v intervalu $\langle -4; 4 \rangle$ konvexní (podmínku pro ryzí konvexnost splňuje pouze při speciální



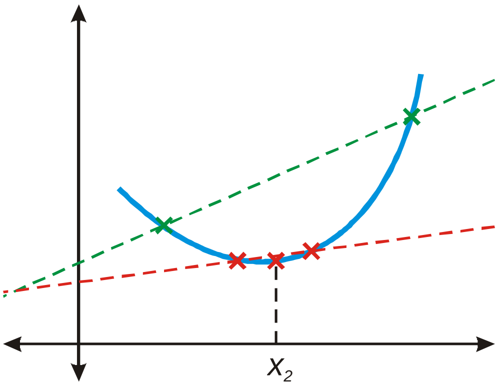
Z obrázku je zřejmé, že funkce $y = |x|$ je v intervalu $\langle 1; 5 \rangle$ konvexní i konkávní.

volbě bodů).

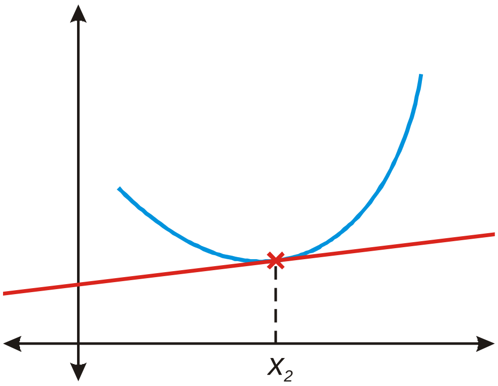


Z obrázku je zřejmé, že funkce $y = x^3$ není v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$ ani konvexní ani konkávní. (v intervalu $\langle -3; 0 \rangle$ by byla ryze konkávní a v intervalu $\langle 0; 3 \rangle$ ryze konvexní).

Problém jsme vyřešili pouze částečně. Na to, abychom poznali, že funkce je v bodě konvexní (nebo konkávní) potřebujeme celý interval. Nedokázali bychom to poznat z chování funkce přímo ve zkoumaném bodu (a jeho libovolně malém okolí)?
Zkusíme na obrázku přibližovat body x_1, x_2, x_3 blíže k sobě.



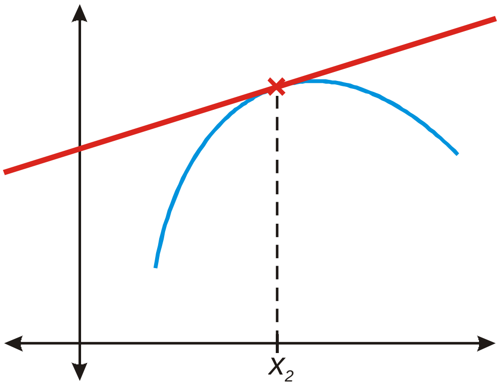
V limitním případě, se z přímky P_1P_3 stane tečna v bodě $[x_2; f(x_2)]$.



a všechny body grafu v okolí bodu x_2 leží nad tečnou.

Funkce *f* je ryze konvexní v bodě x_0, jestliže má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$ a existuje-li takové číslo $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ platí: $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (všechny **body grafu leží nad tečnou**).

Př. 4: Nakresli analogický obrázek, najdi kritérium a sestav definici pro funkci, která je v bodě x_0 ryze konkávní.

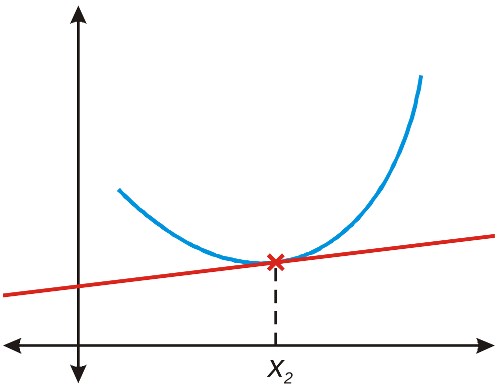


Všechny body grafu v okolí bodu x_2 leží pod tečnou.

Funkce *f* je ryze konkávní v bodě x_0, jestliže má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$ a existuje-li takové číslo $\delta > 0$, že pro každé $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ platí: $f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (všechny **body grafu leží pod tečnou**).

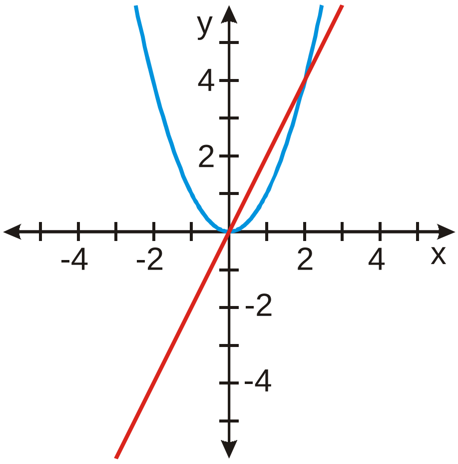
Je-li funkce konvexní v každém bodě intervalu *I*, říkáme, že je **konvexní v intervalu *I***.
Je-li funkce konkávní v každém bodě intervalu *I*, říkáme, že je **konkávní v intervalu *I***.

Jak zjistíme tvar křivky pomocí derivací?
Podíváme se na obrázek s tečnou konvexní funkce:



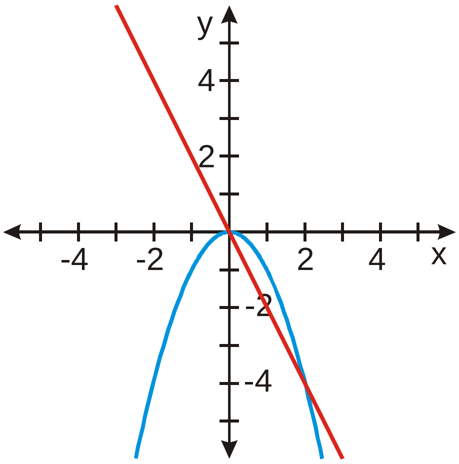
Pokud má tečna ležet pod grafem funkce musí se:
napravo od bodu x_2 strmost grafu zvětšovat $\Rightarrow$ funkce musí růst čím dál rychleji $\Rightarrow$ derivace funkce se musí zvětšovat $\Rightarrow$ druhá derivace funkce musí být kladná.

Stejný výsledek získáme, když prostudujeme graf funkce $y = x^2$ (ryze konvexní v *R*) a její derivace $y' = 2x$:



Celou dobu první derivace funkce $y' = (x^2)' = 2x$ roste (nejprve zmenšuje klesání funkce $y = x^2$ a poté zvětšuje její stoupání.

Analogickou zákonitost najdeme u grafu funkce $y = -x^2$ (ryze konkávní v R) a její derivace $y' = -2x$:



Celou dobu první derivace funkce $y' = (-x^2)' = -2x$ klesá (nejprve zmenšuje růst funkce $y = -x^2$ a poté zvětšuje její klesání.

Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce *f* v bodě x_0 konvexní.
Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce *f* v bodě x_0 konkávní.

Př. 5: Urči intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $y = x^3$.

Výsledek už známe, protože víme, jak vypadá graf funkce, ale teď si to spočítáme:

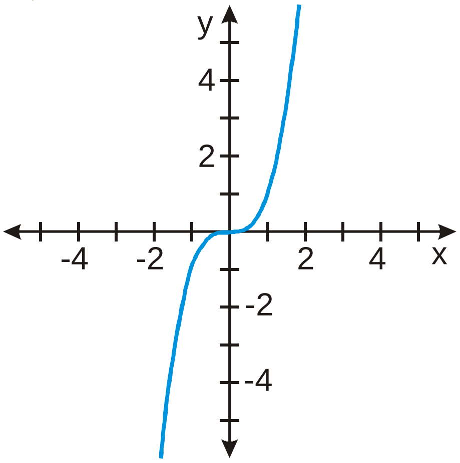
$y' = (x^3)' = 3x^2$

$y'' = (3x^2)' = 6x$

zjišťujeme kdy je druhá derivace kladná: $6x > 0 \Rightarrow x > 0$

- pro $x \in (0;\infty)$ platí $y'' > 0 \Rightarrow$ funkce je konvexní

- pro $x \in (-\infty;0)$ platí $y'' < 0 \Rightarrow$ funkce je konkávní



Je to tak.

Zastavíme se ještě u bodu $x = 0$. V tomto bodě se mění u tvar funkce $y = x^3$ z konkávní funkce se stává funkce konvexní. Takovému bodu se říká **inflexní bod funkce *f*.**

Inflexní body mají vzhledem k druhé derivaci podobné postavení jako body stacionární vzhledem k derivaci první:
Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce *f* a má-li funkce *f* v tomto bodě druhou derivaci pak $f''(x_0) = 0$.
Nulová druhá derivace není postačující podmínka pro existenci inflexního bodu $\Rightarrow$ obrácená věta neplatí. Pokud chceme mít jistotu, že bod s nulovou druhou derivací je inflexní, musíme se přesvědčit, že se v něm mění znaménko druhé derivace.

Př. 6: Najdi inflexní body funkce $y = 3x^4 - 4x^2$. Urči, kdy je funkce konvexní a konkávní.

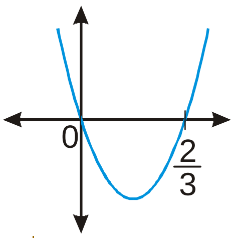
$y' = (3x^4 - 4x^3)' = 12x^3 - 12x^2$

$y'' = (12x^3 - 12x^2)' = 36x^2 - 24x$

V inflexním bodě musí být druhá derivace nulová:
$y'' = 36x^2 - 24x = 12(3x^2 - 2x) = 12x(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow$ dva body podezřelé z inflexe: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ musíme zjistit znaménka druhé derivace

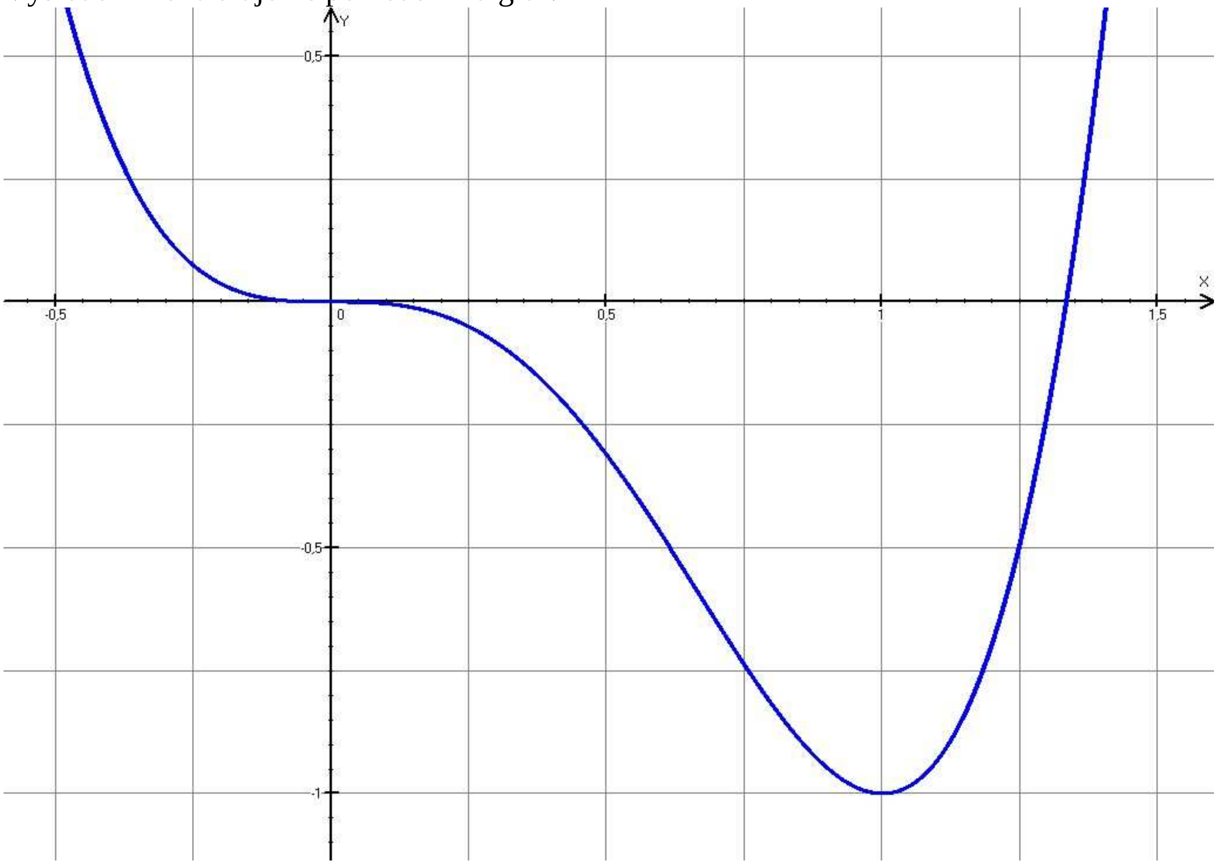
$\Rightarrow$ řešíme nerovnici: $36x^2 - 24x > 0$, $3x^2 - 2x > 0$, před x^2 je kladné číslo $\Rightarrow$ „ďolík“



- pro $x \in (-\infty;0)$ platí $y'' > 0 \Rightarrow$ funkce je konvexní
- pro $x \in \left(0;\frac{2}{3}\right)$ platí $y'' < 0 \Rightarrow$ funkce je konkávní

- pro $x \in (0;\infty)$ platí $y'' > 0 \Rightarrow$ funkce je konvexní

$\Rightarrow$ oba podezřelé body jsou inflexní, v obou se měnilo znaménko druhé derivace
Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Př. 7: Urči inflexní body funkce $y = \frac{x}{x^2+1}$

$$y' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \left[\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right]' = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - (1-x^2)4x}{(x^2+1)^3} =$$

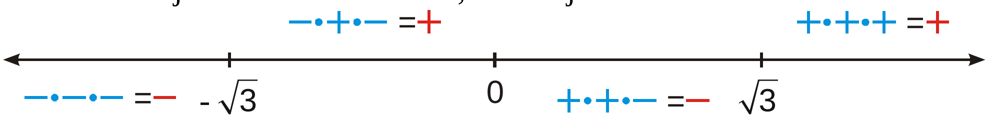
$$= \frac{-2x^3 - 2x - -4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

V inflexním bodě musí být druhá derivace nulová $\Rightarrow$
$2x^3 - 6x = 2x(x^2-3) = 2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow$ tři body podezřelé z inflexe: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ musíme zjistit znaménka druhé derivace (naštěstí záleží pouze na čitateli, jmenovatel je pořád kladny)

$\Rightarrow$ řešíme nerovnici: $2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right) = 2x\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) > 0$

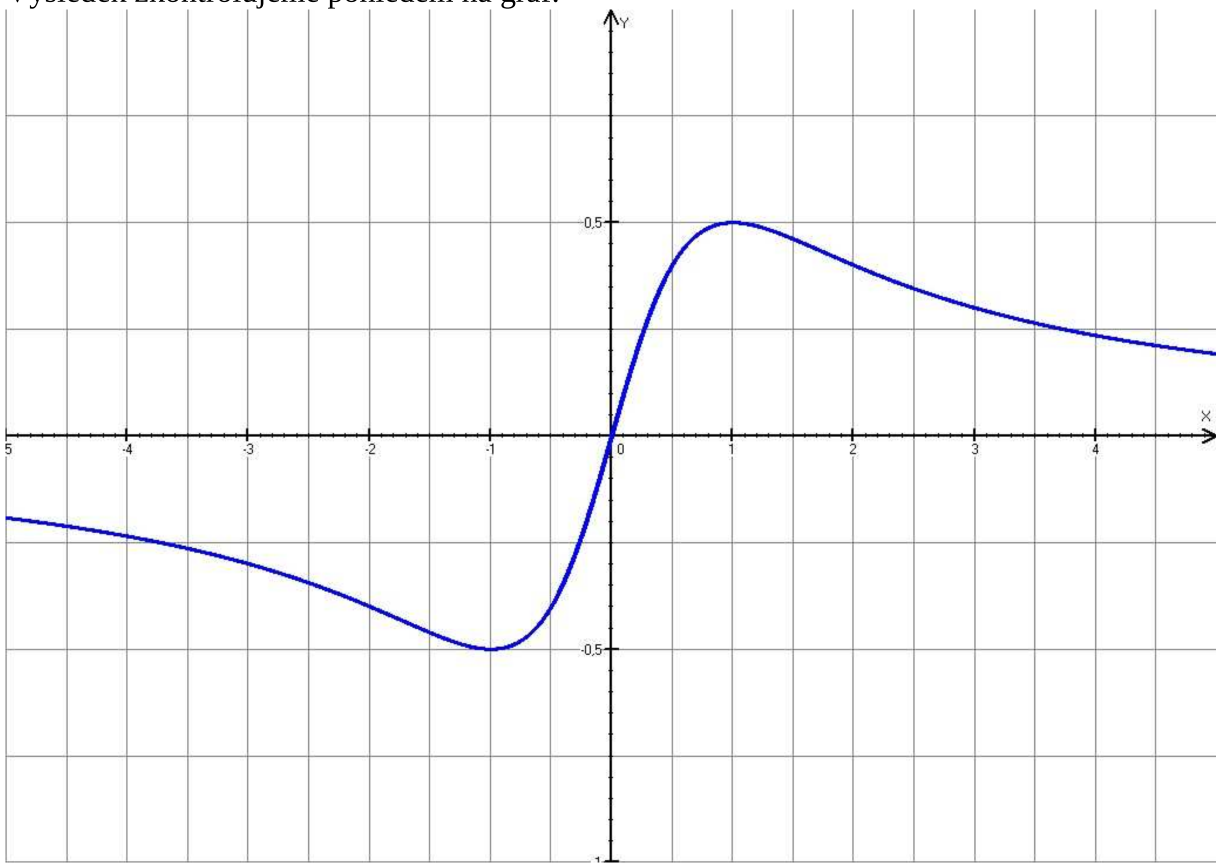
$\Rightarrow$ nerovnice je v součinovém tvaru, řešíme ji nad osou:



- pro $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ platí $y'' < 0 \Rightarrow$ funkce je konkávní
- pro $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ platí $y'' > 0 \Rightarrow$ funkce je konvexní
- pro $x \in \left(0; \sqrt{3}\right)$ platí $y'' < 0 \Rightarrow$ funkce je konkávní
- pro $x \in \left(\sqrt{3}; \infty\right)$ platí $y'' > 0 \Rightarrow$ funkce je konvexní

$\Rightarrow$ všechny tři podezřelé body jsou inflexní, vždy se měnilo znaménko druhé derivace

Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Shrnutí: Konvexnost a konkávnost funkce můžeme zjistit pomocí druhé derivace.