10.2.14 Užití derivace

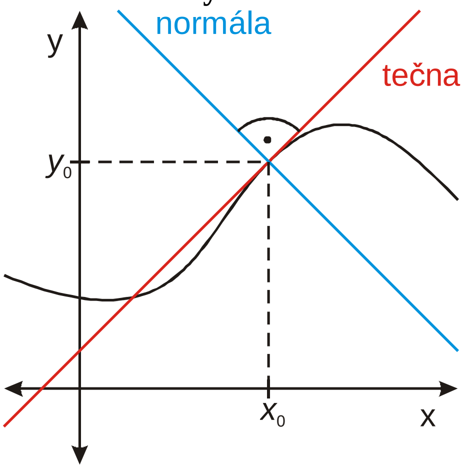
Předpoklady: 10202, 10209

Pedagogická poznámka: Hodinu dělíme na dvě poloviny – jednu na tečny a normály, druhou na L'Hospitalova pravidla.

Už při zavádění derivace, jsme si ukázali, že hodnota derivace v bodě je zároveň hodnotou směrnice tečny grafu funkce v tomto bodě:

$\Rightarrow$ grafu funkce má v bodě $[x_0; y_0]$ tečnu danou rovnicí: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (pokud derivace v tomto bodě existuje).

Kromě tečny (která zachycuje směr grafu v bodě) je nutné určovat i rovnice přímky kolmé na tečnu = **normály v bodě**.



Její rovnice bude mít opět tvar $(y - y_0) = k'(x - x_0)$.

V analytické geometrii jsme si ukázali, že pro směrnice dvou navzájem kolmých přímek platí: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Př. 1: Napiš obecný vzorec pro rovnici normály v bodě $[x_0; y_0]$. Předpokládej, že funkce má v tomto bodě derivaci.

Pro směrnici normály platí: $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$

Dosadíme do obecného tvaru směrnicové rovnice přímky: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Př. 2: Urči rovnici tečny grafu funkce $y = x^2$ v bodě $x_0 = 1$.

Hodnota funkce v bodě $x_0 = 1$: $y = x^2 = 1^2 = 1$

Derivace funkce: $y' = (x^2)' = 2x$

Hodnota derivace: $y' = 2x = 2 \cdot 1 = 2$

Dosazení do rovnice tečny: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$(y-1) = 2(x-1)$

Po úpravách: $y = 2x - 1$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobrým indikátorem toho, jestli mají studenti reálnou představu o tom, co vlastně dělají. Nejčastější chybou je totiž rovnice $(y-1) = 2x(x-1)$, která vznikne tím, že studenti místo hodnoty derivace v konkrétním bodě dosazují její funkční předpis. Což v tomto konkrétním případě znamená, že se z rovnice přímky stane parabola. Bavíme se o tom, že dosazení funkčního předpisu je zjevně nesmyslné, když do rovnice přímky potřebujeme sehnat konkrétní číslo a ne předpis funkce.

Př. 3: Urči rovnici tečny a normály grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = -1$. Nakresli obrázek situace.

Hodnota funkce v bodě $x_0 = -1$: $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Derivace funkce: $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Hodnota derivace: $y' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$

Dosazení do rovnice tečny: $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

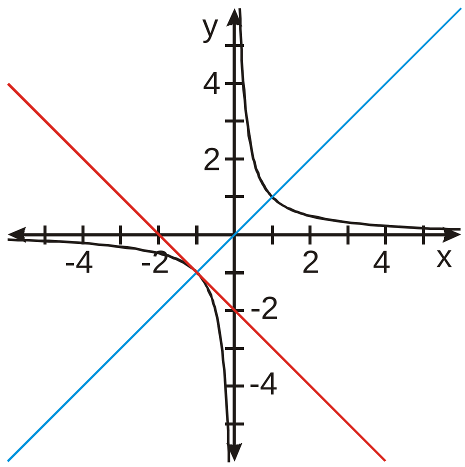
$(y+1) = -1(x+1)$

Po úpravách: $y = -x - 2$

Dosazení do rovnice normály: $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$(y+1) = -\frac{1}{(-1)}(x+1)$

Po úpravách: $y = x$



Rovnice získané výpočtem odpovídají přímkám, které jsme získali graficky

Př. 4: Najdi bod, ve kterém má tečna grafu funkce $y=\sqrt{x^2+1}$ směrnici 0,5. Urči rovnici normály v tomto bodě.

Zderivujeme funkci $y=\sqrt{x^2+1}$: $y'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$.

Tečna má mít směrnici 0,5 $\Rightarrow$ derivace se rovná 0,5: $y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=0,5$ $\Rightarrow$ řešíme rovnici:

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=0,5 \quad /\cdot 2\sqrt{x^2+1}$$

$$2x=\sqrt{x^2+1} \quad /^2$$

$$4x^2=x^2+1$$

$$3x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Řešením rovnice je pouze číslo $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Pokud bychom dosadili do zlomku číslo $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, bude jeho hodnota záporná.

Funkční hodnota v bodě $\frac{\sqrt{3}}{3}$: $y=\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{3}{9}+1}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ tečna i normála prochází bodem $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Dosazení do rovnice tečny: $(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=0,5\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Dosazení do rovnice normály: $(y-y_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

$$\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{0,5}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Derivace mohou značně usnadnit výpočty některých limit:

L'Hospitalova pravidla:

- Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$.

  Potom existuje také $\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ a platí $\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$.

- Nechť $\lim\limits_{x\to a}\left|g(x)\right| = +\infty$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$. Potom existuje také $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ a platí $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$. (O $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nepředpokládáme nic, ani existenci této limity).

Obě pravidla platí také pro limity v bodě zleva, zprava a limity v nevlastních bodech.

Př. 5: Vypočti pomocí L'Hospitalova pravidla $\dfrac{\lim\limits_{x\to 1} x^2-1}{\lim\limits_{x\to 1} x^2+x-2}$.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2-1}{\lim\limits_{x\to 1} x^2+x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)'}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-2\right)'} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2x}{\lim\limits_{x\to 1} 2x+1} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+1} = \frac{2}{3}$$

Pedagogická poznámka: Část studentů příklad samozřejmě nespočítá a proto si ho musíme spočítat i na tabuli, ale všichni by měli dostat šanci zkusit pochopit smysl předchozí věty sami.

Jak používáme L'Hospitalova pravidla?

Pokud při dosazení vyjde v limitě neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$ zderivujeme samostatně čitatel a jmenovatel zlomku a zkusíme dosadit znova. Tento postup můžeme opakovat i vícekrát.

Př. 6: Vypočti limity

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-5x-12}{x^2-2x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

a) $$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-5x-12}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(2x^2-5x-12\right)'}{\left(x^2-2x-8\right)'} = \lim_{x\to 4}\frac{4x-5}{2x-2} = \frac{4\cdot 4-5}{2\cdot 4-2} = \frac{11}{6}$$

b) $$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} = \lim_{x\to -1}\frac{\left(x+1\right)'}{\left(\sqrt{x+2}-1\right)'} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \lim_{x\to -1} 2\sqrt{x+2} = 2\sqrt{(-1)+2} = 2$$

c) $$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(1-\sqrt{x-3}\right)'}{\left(x^2-16\right)'} = \lim_{x\to 4}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x} = \lim_{x\to 4} -\frac{1}{4x\sqrt{x-3}} = -\frac{1}{4\cdot 4\sqrt{4-3}} = -\frac{1}{16}$$

Př. 7: Vypočti limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2\sin 3x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 3x\cdot 3}{1}=6\cos(3\cdot 0)=6$

b) $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x-1)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2\cos x\sin x)'}{(2x)'}=$$
$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left[(-\sin x)\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos x\right]}{2}=-\sin^2 0+\cos^2 0=1$$

c) $$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\operatorname{tg} x)'}{(\sin x-\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-(-\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x+\sin x}=$$
$$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x(\cos x+\sin x)}=\frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{-1}{\frac{2}{4}\frac{2\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$$

Př. 8: Vypočti limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2}{x^3+3x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x+2}{3\log x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2-4x}{3x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12x-4}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{6}=2$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x+2}{3\log x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{3}{x\ln 10}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{3}{x\ln 10}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$

Př. 9: Vypočti limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

V tomto stavu nemůžeme L'Hospitalovo pravidlo použít, v limitě není žádný podíl $\Rightarrow$ musíme podíl vyrobit:

$$\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Pedagogická poznámka: Protože studenti určitě nestihnou spočítat všechny příklady s limitami, na konci hodiny si ukážeme poslední příklad, který obsahuje trik, na který naprostá většina studentů sama nepřijde.

Př. 10: Petáková:
strana 156/cvičení 26 d) f)
strana 157/cvičení 27 b) f)
strana 157/cvičení 31
strana 161/cvičení 62 b) e) g) h)

Shrnutí: Použití derivace dělá z výpočtu některých limit mechanickou záležitost.