10.3.6 Integrování substituční metodou I

Předpoklady: 10207, 10303

V minulé hodině jsme sice neodvodili obecný vzorec pro integraci součinu funkcí, ale přesto se nám povedlo pomocí vzorce na derivování součinu vymyslet integrační metodu per partes, která nám umožnila spočítat některé jinak neřešitelné integrály.
Vzorec pro derivaci podílu nám z tohoto pohledu nic nepřinese, podíváme se na vzorec pro derivování složené funkce.

Jak integrovat na základě vzorce: $\left[y\left(z(x)\right)\right]' = y'(z)\cdot z'(x)$?

Zkusíme konkrétní příklad:

$\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = \cos x^3 \cdot 3x^2$

Z předchozího musí platit: $\int \cos x^3 \cdot 3x^2\, dx = \sin x^3 + C$.

Další zdánlivě paradoxní výsledek při počítání integrálů. „Jednodušší" integrál $\int \cos x^3\, dx$ spočítat neumíme, ale složitější $\int \cos x^3 \cdot 3x^2\, dx = \sin x^3 + C$ spočteme snadno.

Jak je to možné?
Člen $3x^2$ sice vnitřek integrálu komplikuje, ale integrování obrovsky usnadňuje. Jde přesně o výraz, který vznikne při derivování vnitřku složené funkce a který potřebujeme, abychom dokázali integrál spočítat.

Kde je ta substituce z nadpisu?

$\int \cos x^3 \cdot 3x^2\, dx = \sin x^3 + C$

Výraz $\cos x^3$ integrujeme na $\sin x^3$ stejně jako bychom si napsali $\int \cos t\, dt = \sin t + C$. Platilo by tedy $t = x^3$.

Jaký význam má v integrálu nezbytný člen $3x^2\, dx$?

Vidíme už z postupu při derivování: $\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = \cos x^3 \cdot 3x^2$

Pokud platí $t = x^3$, pak také platí $dt = \left(x^3\right)' = 3x^2 dx$.

U chápeme i název hodiny:

$\int \cos x^3 \cdot 3x^2\, dx = \int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin x^3 + C$

$x^3 = t \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

$\Rightarrow$ výraz $3x^2$ nám umožnil změnit integrovanou proměnnou a tím z těžkého integrálu $\int \cos x^3 \cdot 3x^2\, dx$ udělat jednoduchý $\int \cos t\, dt$.

Věta o substituci:
Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu $(a;b)$. Pro každé $x \in (a;b)$ nechť hodnota $g(x)$

patří do intervalu $(\alpha;\beta)$. Pak v intervalu $(a;b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x))\cdot g'(x)$, tedy $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+C = F(g(x))+C$.

Zkusíme si ještě jeden příklad:

$$\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

Př. 1: Vypočti:

a) $\int \sin x^2 \cdot 2x\,dx$ b) $\int \frac{1}{x^3+2}\cdot 3x^2\,dx$ c) $\int (x^4+3)^2\,4x^3 dx$

a)

$$\int \sin x^2 \cdot 2x\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos x^2 + C$$

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^3+2}\cdot 3x^2\,dx$

na první pohled několik možností, jak substituci udělat:

- $t = \frac{1}{x^3+2} \Rightarrow dt = -\frac{1}{(x^3+2)^2}3x^2 dx$
- $t = x^3+2 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$
- $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

zvolíme prostřední možnost. Pro první možnost nenajdeme v integrálu potřebný výraz pro dt, třetí možnost je přehnaně skromná $\Rightarrow$ **vždy se snažíme substituovat co nejsložitější výraz, pro který najdeme v integrálu výraz pro** dt

$$\int \frac{1}{x^3+2}\cdot 3x^2\,dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|x^3+2\right| + C$$

$t = x^3+2 \Rightarrow dt = 3x^2\,dx$

c)

$$\int (x^4+3)^2\,4x^3 dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^4+3)^3}{3} + C$$

$t = x^4+3 \Rightarrow dt = 4x^3\,dx$

Pedagogická poznámka: Největší problémy mají studenti s bodem b). Je to vhodné místo k diskusi o tom, jaký výraz vlastně substituovat.

Pedagogická poznámka: Obecným problémem při substituci je substituování integrační proměnné dx. Je asi nutné studentům neustále opakovat, že nemůžeme integrovat $\sin t$ podle dx a že potřebnou hodnotu dt získáme tím, že zderivujeme výraz pro t.

Př. 2: Vypočti:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ b) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + C$$

$t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx$

b)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

c)

$$\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+3} + C$$

$t = x+3 \Rightarrow dt = dx$

Většinou však nemáme substituce dokonale připravené jako v předchozích příkladech a musíme si je dovyrobit sami:

$\int \sin x^3 \cdot x^2\,dx$ zdá se, že bychom mohli použít substituci $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$, bohužel v integrálu nemáme celý výraz $3x^2 dx \Rightarrow$ musíme si ho dovyrobit pomocí triku $1 = \frac{1}{3}\cdot 3$:

$$\int \sin x^3 \cdot x^2\,dx = \int \sin x^3 \cdot \frac{1}{3}\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

$t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

Př. 3: Vypočti:

a) $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$ b) $\int \frac{1}{(4x-2)^3}\,dx$ c) $\int x\sqrt{1-3x^2}\,dx$

a)

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1}3x^2 dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + C$$

$t = x^3-1 \Rightarrow dt = 3x^2\,dx$

b)

$$\int \frac{1}{(4x-2)^3}\,dx = \int \frac{1}{(4x-2)^3}\frac{1}{4}4dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{8t^2} + C = -\frac{1}{8(4x-2)^2} + C$$

$t = 4x-2 \Rightarrow dt = 4dx$

c)

$$\int x\sqrt{1-3x^2}\,dx = \int -\frac{1}{6}(-6x)\sqrt{1-3x^2}\,dx = -\frac{1}{6}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{6}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + C =$$

$t = 1-3x^2 \Rightarrow dt = -6x\,dx$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{\left(1-3x^2\right)^3} + C$$

Př. 4: Petáková:
strana 164/cvičení 88 b) e) e) f)

Shrnutí: Substituční metodu můžeme při integraci použít pokud se nám podaří vytvořit v integrálu derivaci substituované funkce.