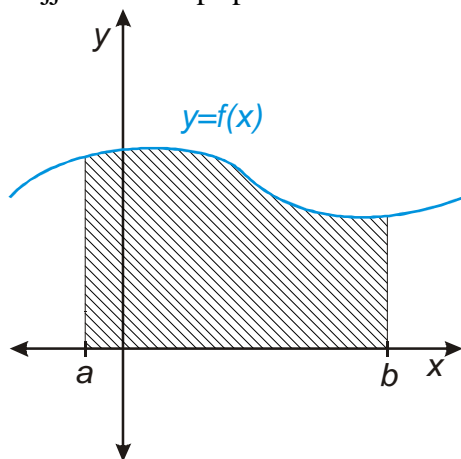


10.3.13 Výpočet plochy obrazce I

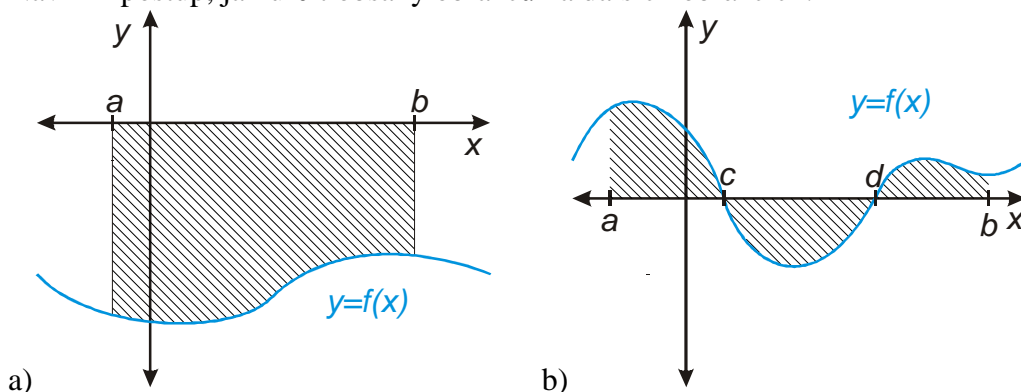
Předpoklady: 10311

Nejjednodušší případ už známe z hodiny, ve které jsme odvozovali určitý integrál:



Útvar $U(a, b, f)$ = plocha vymezená přímkami $y = 0$ (osa x), $x = a$, $x = b$ a grafem spojitě, nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle \Rightarrow S(U) = \int_a^b f(x) dx$.

Př. 1: Navrhni postup, jak určit obsahy obrázců na dalších obrázcích:



a) Na levém obrázku je nakreslena funkce, která je v intervalu $\langle a; b \rangle$ záporná \Rightarrow záporný vyjde i určitý integrál \Rightarrow musíme znaménko změnit na kladné: $S(U) = -\int_a^b f(x) dx$

b) Na pravém obrázku je funkce, která několikrát mění své znaménko \Rightarrow jednotlivé části plochy by se od sebe odečítaly \Rightarrow musíme výpočet rozdělit do intervalů, ve kterých má funkce stále stejné znaménko a podle potřeby před integrály přidat mínus, aby všechny části vycházely kladně: $S(U) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$

\Rightarrow při výpočtu plochy musíme mít představu o znaménkách hodnot funkce.

Př. 2: Vypočti obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:

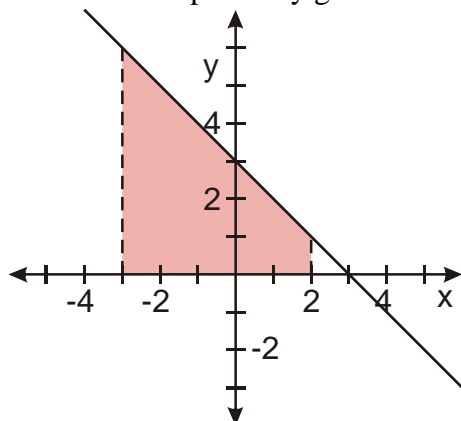
a) $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$

b) $y = x^2 - x - 12, y = 0$

c) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = 2\pi$

a) $y = 3 - x, y = 0, x = -3, x = 2$

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



⇒ spočteme klasický určitý integrál $S(U) = \int_a^b f(x) dx$

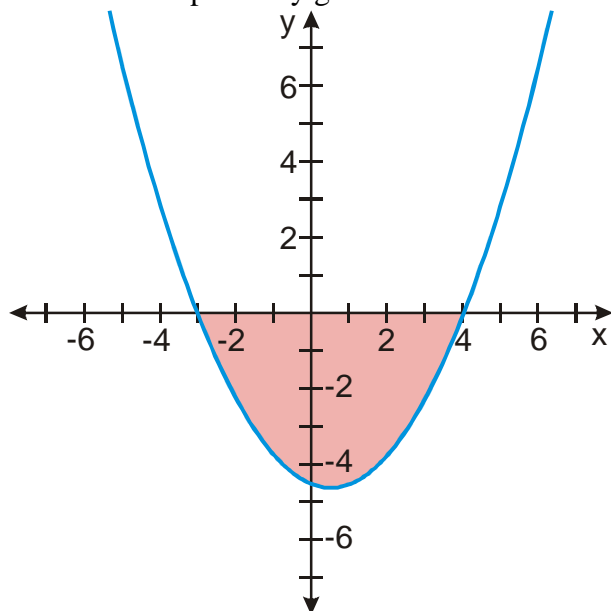
$$S(U) = \int_{-3}^2 (3-x) dx = [3x]_{-3}^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^2 = [3 \cdot 2 - 3(-3)] - \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} \right] = 15 - \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{35}{2}$$

b) $y = x^2 - x - 12, y = 0$

Najdeme průsečíky s osou x : $y = x^2 - x - 12 = 0$

$$(x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 4.$$

Nakreslíme si přibližný graf funkce:



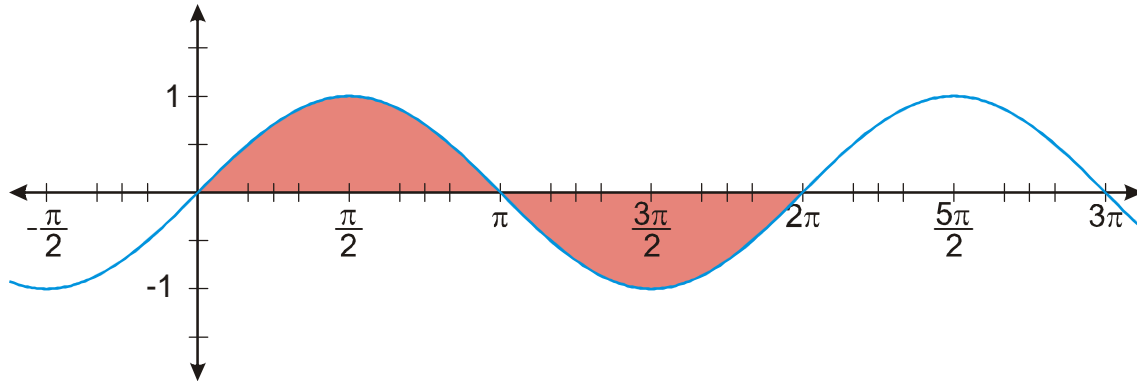
⇒ spočteme určitý integrál se záporným znaménkem: $S(U) = -\int_a^b f(x) dx$

$$S(U) = -\int_{-3}^4 (x^2 - x - 12) dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^4 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^4 + [12x]_{-3}^4 =$$

$$= -\left[\frac{4^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right] + \left[\frac{4^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right] + [12 \cdot 4 - 12 \cdot (-3)] = -\left(\frac{64}{3} + 9\right) + \left(8 - \frac{9}{2}\right) + 84 = \frac{343}{6}$$

c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

Nakreslíme graf funkce:



Poznámka: Graf funkce v bodě b) je ve skutečnosti podstatně štíhlejší, ve skutečnosti je jeho tvar zcela nepodstatný záleží pouze na tom, která jeho část se nachází pod osou.

Př. 3: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

Shrnutí: